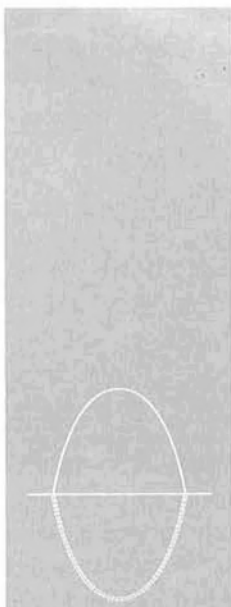


# La teoría del arco de fábrica: desarrollo histórico

Santiago Huerta Fernández



## DESCRPTORES

ARCOS  
BÓVEDAS  
PUENTES  
FÁBRICA  
CÁLCULO DE ESTRUCTURAS  
HISTORIA  
ANÁLISIS LÍMITE

El arco es la base de la construcción en fábrica: es la forma natural de salvar un vano con un material que resiste bien las compresiones y poco o nada las tracciones. Las dovelas de un arco se *empujan* entre sí al intentar caer hacia abajo y son precisamente estos empujes los que las mantienen en equilibrio. "El arco nunca duerme", dice un antiguo proverbio árabe, aludiendo al empuje constante que ejercen los arcos. Este empuje debe ser resistido por los estribos, y el problema de calcular la dimensión adecuada para arcos y estribos es el tema central de toda la construcción abovedada en fábrica desde sus orígenes hace unos 6.000 años.

Calcular el empuje de un arco y decidir qué estribo necesita no es un problema fácil y los antiguos constructores manifiestan su perplejidad en los documentos que han llegado hasta nosotros. Así, Rodrigo Gil de Hontañón, el gran arquitecto del gótico tardío y Renacimiento español escribía a principios del siglo XVI: "Probado he muchas veces sacar razón del estribo que abrá menester una cualquiera forma [arco] y nunca hallo regla que me sea suficiente (...)".<sup>1</sup> Rodrigo Gil cuando habla de *razón* no piensa en ninguna teoría científica; razón es también el "orden y método de una cosa", y Rodrigo Gil quería saber qué pasos seguir para establecer los estribos de los arcos. Más adelante da una regla que "(...) sirbe para saber lo que le toca de estribo a cualquiera genero de arco."<sup>2</sup> (Fig. 1). La regla, esto es la *razón* o método, es simplemente una construcción geométrica para determinar el estribo a partir de la forma del arco. De hecho, sabemos que desde la antigüedad los constructores empleaban este tipo de reglas empíricas para *calcular* la geometría y dimensiones de sus edificios (desde el siglo XVI aparecen con frecuencia en los tratados de construcción e ingeniería).

Hay un cálculo empírico que precede al cálculo científico basado en las leyes de la mecánica. Que este método empírico no debe de ser tan absurdo como a veces se ha querido ver, lo prueban los edificios construidos durante la

época "pre-científica" de las estructuras. (El Panteón –siglo I–, Santa Sofía –siglo VI– o las catedrales góticas, fueron calculados con reglas empíricas).

El estudio de las reglas empíricas para el cálculo de arcos y estribos se ha realizado en otra parte.<sup>3</sup> En el presente artículo nos limitaremos a reconocer las líneas maestras del desarrollo de la teoría científica del arco de fábrica, desde las primeras aportaciones conocidas hasta la actualidad. Este tipo de estudios son escasos, quizá porque la historia de la teoría de estructuras se empezó a escribir en la segunda mitad del siglo XIX, en plena decadencia de la construcción de fábrica.<sup>4</sup> Por último, hay que señalar que la historia de la teoría del arco de fábrica no tiene un interés meramente erudito; seguir los razonamientos y experiencias de los mejores constructores de los últimos cinco siglos es una buena manera de llegar a comprender los principios básicos del comportamiento de las fábricas.

## Leonardo

Leonardo da Vinci (1452-1519) fue el primero en intentar un estudio mecánico de los arcos. En particular, en el Códice de Madrid aparecen numerosos dibujos de experimentos ideados para comprender la forma en que empujan los arcos y resisten sus estribos. Leonardo desconocía, sin embargo, la herramienta fundamental para estudiar el equilibrio de cualquier estructura: la ley del paralelogramo de fuerzas. De hecho, sus análisis se ven seriamente condicionados por confusas ideas de la mecánica medieval, que ni siquiera dominaba.<sup>5</sup> No obstante, el talento extraordinario de Leonardo se manifiesta con claridad en los ingeniosos ensayos para determinar el empuje de los arcos o para conocer el equilibrio de las dovelas (Fig. 2 a). También le corresponde a él el descubrimiento del mecanismo correcto de colapso de los arcos por formación de articulaciones, anticipándose a los primeros ensayos publicados por Danyzy (ver más adelante) en más de doscientos años (Fig. 2 b; cf. Fig. 7).

Los manuscritos de Leonardo no fueron publicados hasta el siglo XIX y su influencia fue nula en todo el desarrollo posterior. No obstante, como en tantos otros campos de la ciencia, es preciso reconocer su prioridad y su genio.

### Hooke y la catenaria invertida

En Inglaterra es Robert Hooke quien, hacia 1670, plantea por primera vez en términos científicos el problema del arco. Unos años más tarde da la respuesta y propone la catenaria como figura ideal: "Del mismo modo que cuelga el hilo flexible, así, pero invertido, se sostendrá el arco rígido", escribió en forma de anagrama al final de uno de sus libros (Fig. 3). Parece, además, probado que Hooke aplicó su teoría cuando colaboró con Wren en el proyecto de la cúpula de San Pablo.<sup>6</sup> Unos treinta años más tarde, en 1698, Gregory formula de forma independiente (el anagrama de Hooke sólo fue descifrado en 1705) el mismo principio y expone la condición de estabilidad de un arco: "Sólo la catenaria [invertida] es la forma correcta de un arco. Y si arcos de otras formas se sostienen es porque en su espesor hay contenida una catenaria."<sup>7</sup> Este es el principio de estabilidad de un arco de fábrica de cualquier forma. Gregory, además, se da cuenta de que la analogía de la catenaria sirve también para dimensionar los estribos y, a continuación, afirma: "La fuerza que en la cadena tira hacia adentro en el arco empuja hacia afuera. Todas las circunstancias relativas a la resistencia de los estribos sobre los que apoyan los arcos, pueden calcularse geoméricamente a partir de esta teoría, que es fundamental en la construcción de los edificios."

Hooke y Gregory abrieron una vía que fue seguida en su mayor parte por ingenieros ingleses: considerar la catenaria invertida de las cargas que soporta el arco como la trayectoria de los esfuerzos. La llamaban *curve of equilibrium*, y a lo largo de todo el siglo XVIII grandes ingenieros como Rennie aplicaron esta teoría al proyecto de sus puentes de fábrica (Fig.4).<sup>8</sup>

### La Hire y la teoría de la cuña

En Francia, Philippe de La Hire emplea un enfoque distinto para tratar de entender la mecánica del arco de dovelas. Utiliza la teoría de la cuña, una de las cuatro máquinas clásicas, imaginando que las dovelas no presentan rozamiento entre sí. Primero, en su «*Traité de Mécanique*»,<sup>9</sup> aborda el problema de cuál ha de ser el peso de las dovelas para que la estabilidad sea posible; para hallar la relación entre sus pesos emplea el polígono funicular. Sin embargo, la hipótesis de ausencia de rozamiento entre las dovelas lleva a resultados absurdos, como que un arco semicircular para ser estable precisaría de una carga infinita en sus arranques. La Hire era consciente de ello y afirma: "(...) no es necesario guardar la proporción que se acaba de determinar en todo su rigor, basta con tenerla en cuenta". Las observaciones de La Hire tuvieron una gran influencia en el proyecto de arcos, apareciendo el arco de sección variable, que presenta la sección mínima en la clave, creciendo hasta alcanzar el máximo en los arranques.<sup>10</sup>

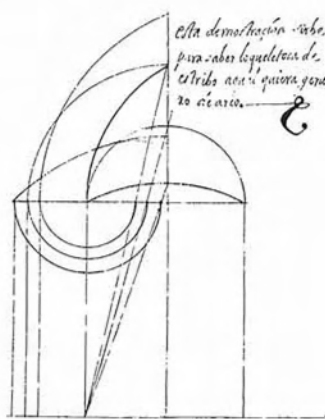


Fig. 1. Rodrigo Gil de Hontañón, regla para calcular el estribo de los arcos (S. García Compendio..., Biblioteca Nacional de Madrid).

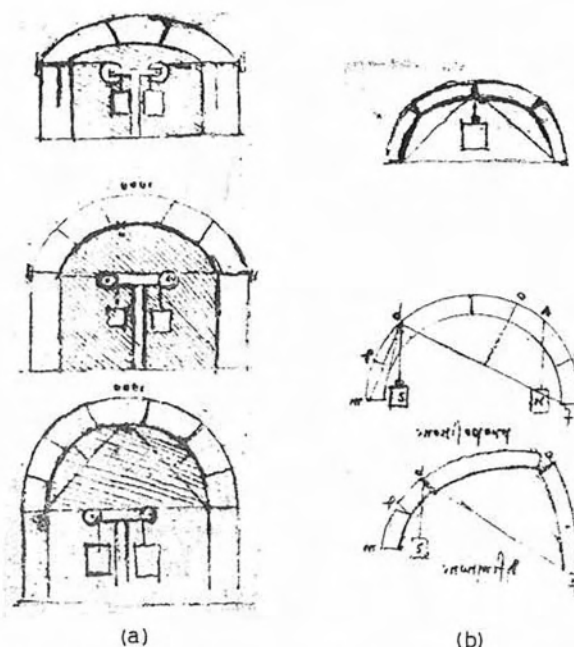


Fig. 2. Leonardo da Vinci, Ensayos sobre arcos (Códice de Madrid, Biblioteca Nacional).

Su siguiente trabajo es el más importante; en 1712 publica su memoria "Sobre la construcción de las bóvedas en los edificios",<sup>11</sup> donde establece por primera vez un procedimiento para calcular los estribos de los arcos. Observa que cuando los estribos son insuficientes el arco o bóveda se rompe hacia la mitad entre la clave y los arranques; supone, entonces, que la mitad superior del semiarco (MLEF en la figura 5) actúa como una "cuña" que desliza sin rozamiento sobre el plano LM. Esto produce una fuerza en L que tiende a volcar el estribo. La Hire no fija la posición de la junta de rotura. El procedimiento de análisis es lo que hoy llamaríamos "límite" o "a rotura"; imagina un modo de colapso y establece el equilibrio entre las partes. El modo de colapso es incorrecto (no tiene en cuenta el rozamiento entre las dovelas) pero los resultados van casi siempre a favor de seguridad.<sup>12</sup>

La memoria de La Hire tuvo una repercusión inmediata; hacía tiempo que los constructores buscaban un procedimiento científico para calcular los estribos. En particular, el gran inge-

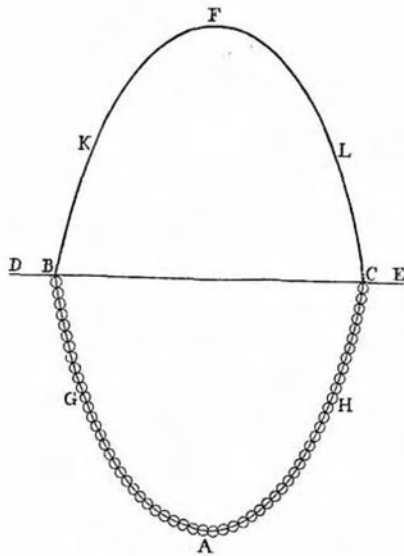


Fig. 3. El principio de la catenaria invertida de Hooke (según Poleni, *Memorie istoriche*, 1748).

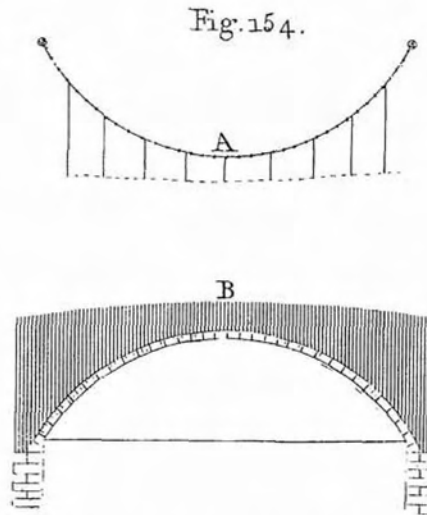


Fig. 4. Principio del proyecto de puentes con la curva de equilibrio (Young, *A course of lectures*, 1807).

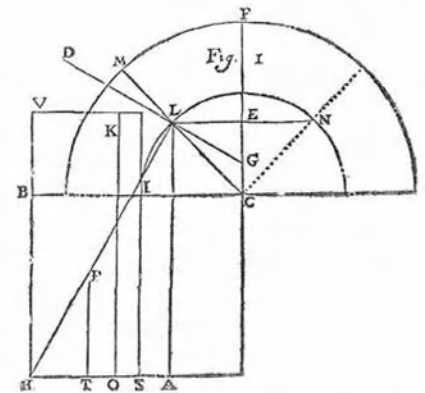


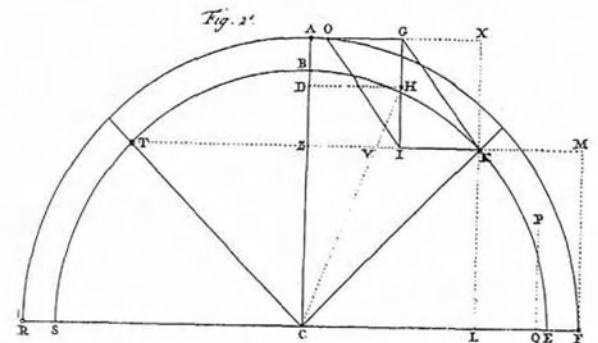
Fig. 5. Cálculo de los estribos por el método de la cuña (La Hire, *Sur le construction des voûtes*, 1712).

niero francés B. F. Bélidor adoptó este método (simplificándolo) y lo aplicó a un gran número de casos particulares en sus obras dedicadas a la ingeniería.<sup>13</sup> Posteriormente Perronet extendió el método a los puentes con arcos carpaneles (en "anse de panier"), y elaboró, hacia 1750, unas tablas para el cálculo de los arcos de los puentes y sus estribos que tuvieron gran difusión tanto en Francia como en el resto de Europa.<sup>14</sup>

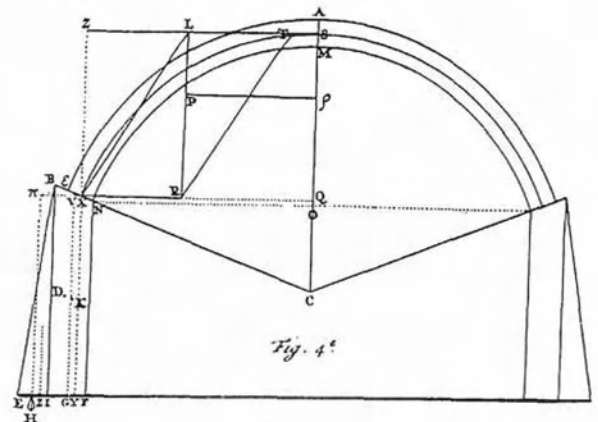
No obstante, aunque la hipótesis de La Hire daba muy buenos resultados prácticos, era evidente que el colapso de los arcos no se producía por deslizamiento, sino por vuelco, como lo demostraban la ruina de algunas bóvedas y los ensayos sobre modelos. Sin embargo, los buenos resultados prácticos y la sencillez del modelo matemático hicieron que las hipótesis de ausencia de rozamiento y de la cuña tuvieran una pervivencia de más de un siglo.

### Couplet y Coulomb: colapso por formación de articulaciones

Hemos visto cómo ya Leonardo había observado que el colapso de un arco se producía por formación de articulaciones; el rozamiento entre las piedras es tan grande que impide que unas piedras deslicen sobre otras. El primer análisis basado en esta hipótesis corresponde a P. Couplet, quien tras considerar en su memoria la hipótesis de ausencia de rozamiento, considera en la segunda parte la imposibilidad de deslizamiento, produciéndose por tanto el colapso cuando se forman suficientes articulaciones como para convertir el arco en un mecanismo.<sup>15</sup> Couplet se ocupa en primer lugar del mínimo espesor de un arco compatible con la estabilidad, y lo calcula para un arco de medio punto (Fig. 6 a) y para un arco escarzano; más adelante estudia el empuje de los arcos con vistas a calcular los estribos (Fig. 6 b). Couplet fija arbitrariamente la junta de rotura entre la clave y los arranques a 45°, si bien el error que esto produce es mínimo.



(a)



(b)

Fig. 6. Arco límite de medio punto (a) y cálculo de los estribos de un arco (b). (Couplet, *De la poussée des voûtes*, 1730).

La verificación experimental del análisis de Couplet vino poco más tarde. En 1732 Danizy publica en las Actas de la Academia de Montpellier los resultados de unos ensayos con pequeños modelos de arcos de escayola que demostraban el mecanismo de rotura propuesto por Couplet (Fig. 7).<sup>16</sup>

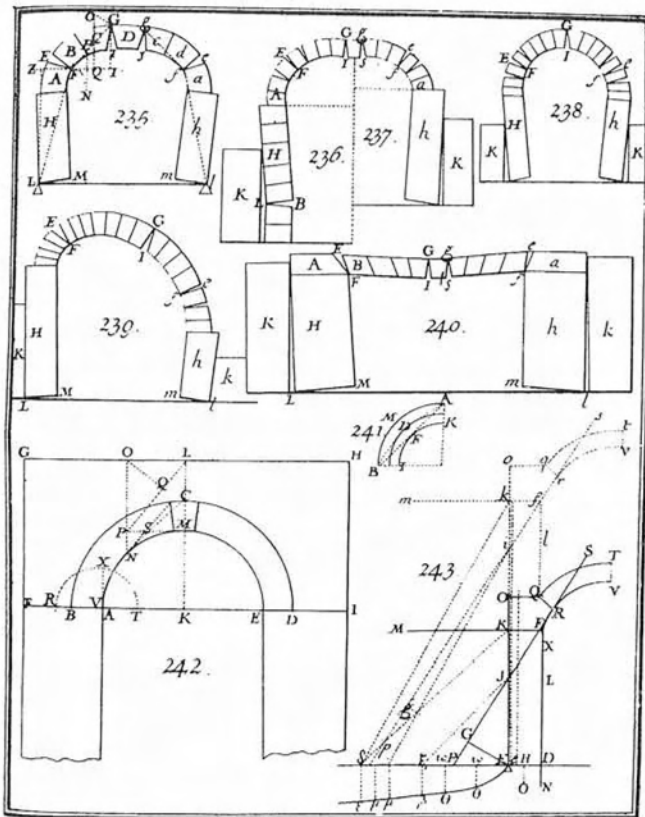


Fig. 7. Colapso de un arco de dovelas por formación de articulaciones (Danyzy, *Méthode générale pour déterminer... la poussée des voûtes*, 1732).

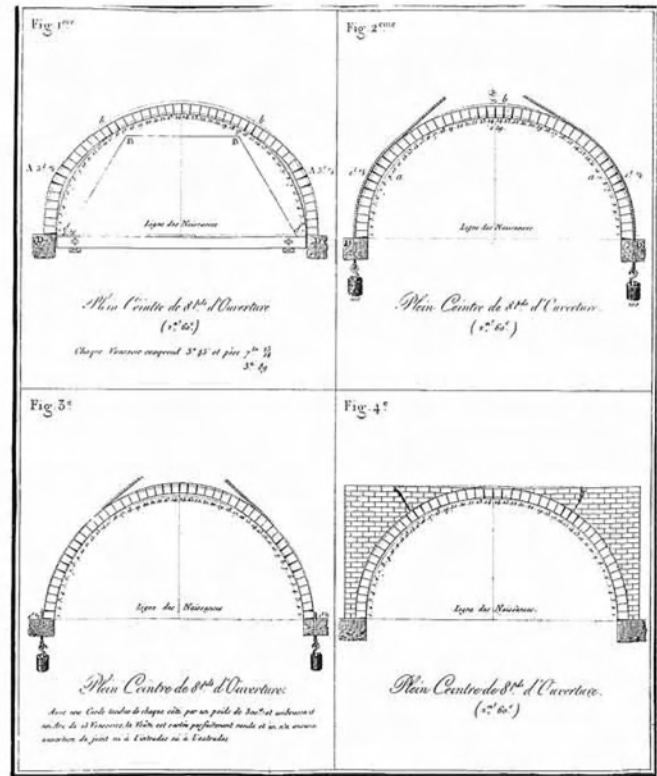


Fig. 8. Ensayos de colapso sobre arcos de ocho pies de luz (Boistard, *Expériences sur la stabilité des voûtes*, 1810).

Posteriormente, Gauthier realizó también ensayos con idéntico resultado,<sup>17</sup> que Boistard repitió con modelos de gran tamaño (arcos de 2,60 m de luz), considerándose a partir de entonces como definitivos (Fig. 8).<sup>18</sup>

Como hemos visto, Couplet excluye la posibilidad de deslizamiento y supone una cohesión nula en las juntas entre dovelas; además, fija la posición de las articulaciones de forma arbitraria. Estas simplificaciones están plenamente justificadas, como veremos, pero en su momento se vieron como una limitación de su teoría. El primer análisis completamente general de la mecánica de los arcos corresponde a Coulomb. En 1776 presenta a la Academia Real de Ciencias de París una memoria genial por su sencillez y claridad. De hecho Coulomb "resuelve" el problema de la teoría de la estabilidad de los arcos de fábrica, estableciendo la base matemática de los distintos modos de colapso posibles, incluyendo la posibilidad de deslizamiento.

Coulomb analiza una bóveda simétrica (Fig. 9) y, como la Hire, aísla una parte por un cierto plano hipotético de corte mm. El empuje horizontal en la clave, desconocido, estará comprendido entre ciertos valores límites (máximos y mínimos) en las hipótesis tanto de fallo por deslizamiento (considerando rozamiento y cohesión) como por "vuelco" alrededor de las aristas superior e inferior. Coulomb afirma que el fallo por deslizamiento es muy raro y propone a efectos prácticos estudiar sólo la posibilidad de colapso por vuelco. Para encontrar la posición de la junta de rotura más desfavorable sugiere el empleo del método de máximos y mínimos.<sup>19</sup>

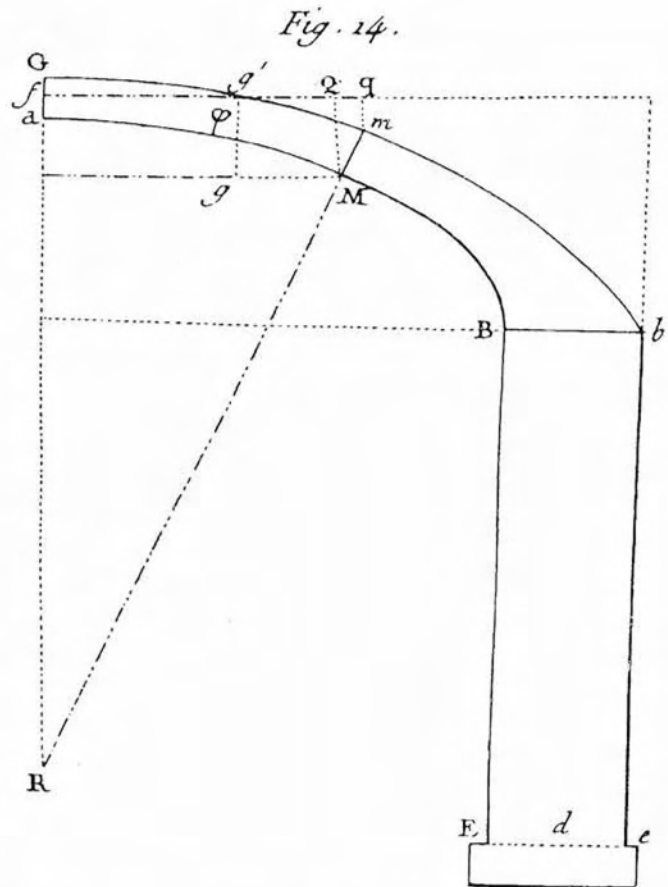


Fig. 9. Equilibrio de una bóveda de fábrica simétrica (Coulomb, *Essai sur une application des règles de maximis et minimis*, 1773).



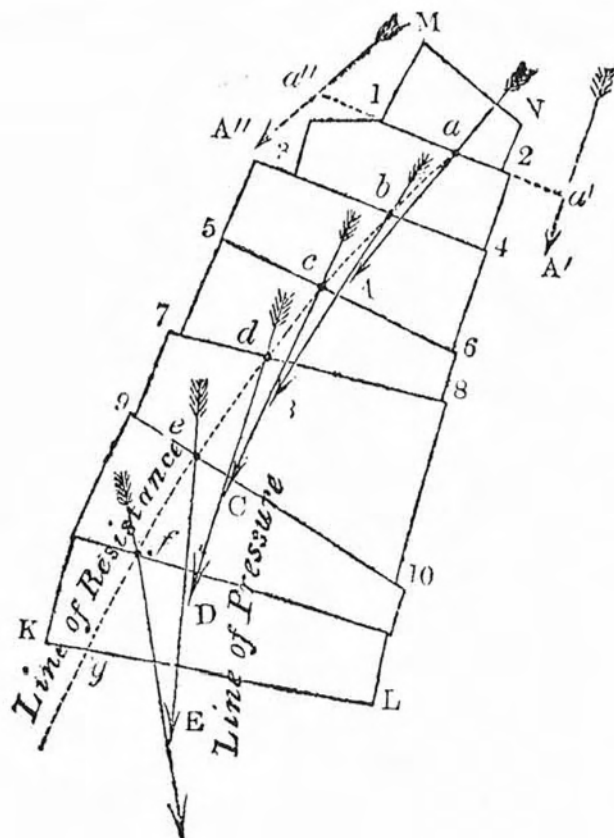


Fig. 10. Línea de empujes (line of resistance) en un macizo de fábrica (Moseley, *The mechanical principles of engineering*, 1843).

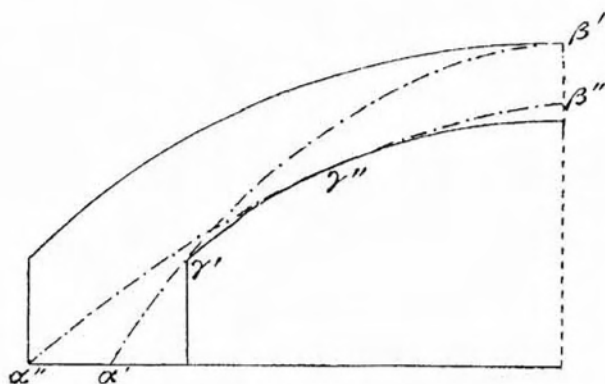


Fig. 11. Líneas de empuje máximo ( $\alpha'' \gamma' \beta''$ ) y mínimo ( $\alpha' \gamma \beta'$ ) (Méry, *Sur l'équilibre des voûtes en berceau*, 1840).

La teoría de Coulomb, extraordinariamente sintética y desprovista de ejemplos de aplicación, tarda en ser asimilada. En 1820, casi 50 años más tarde, Audoy la redescubre y desarrolla, obteniendo fórmulas de aplicación práctica; éstas tienen todavía una expresión matemática excesivamente complicada.<sup>20</sup> Audoy realiza también la primera discusión sobre el problema de la seguridad, que, curiosamente, establece por comparación con la "estabilidad de la Hire".<sup>21</sup> Las siguientes aportaciones tratan de simplificar las expresiones de Audoy. Así, en 1835, Garidel y Petit, y en 1840 Michon, publican tablas para calcular los estribos de distintos tipos de arcos evitando así penosos tanteos.<sup>22</sup> También en 1835 Poncelet desarrolla un método gráfico que, aunque no desprovisto de cierta complejidad, supone un considerable ahorro de tiempo.<sup>23</sup>

## La línea de empujes

En todo este tiempo se había olvidado, salvo en Inglaterra y casos aislados en Alemania,<sup>24</sup> la teoría de la catenaria invertida de Hooke. La teoría de Hooke permitía intuir la trayectoria de las cargas dentro del arco, pero carecía de precisión. En particular no permitía conocer con exactitud la dirección de los empujes, ni contemplaba la influencia del rozamiento. Además, en su estado de desarrollo, no permitía predecir la situación de las juntas de rotura de las bóvedas ni explicaba suficientemente los ensayos sobre modelos. Es entonces, entre 1830 y 1840, cuando aparece el concepto de línea de empujes, que permitiría incluir, con todo rigor, la teoría de Hooke dentro de la de Coulomb.

Imaginemos una fábrica dada formada por un conjunto de bloques separados por planos o, alternatively, imaginemos que un sistema de planos divide hipotéticamente la fábrica en bloques. Se define la línea de empujes, como el lugar geométrico del punto de paso de la resultante de las fuerzas por cada uno de los planos (ver la Fig. 10 de Moseley). Su forma depende, por tanto, de la geometría de la fábrica, pero también del sistema de planos de corte considerado. En estas condiciones, la resultante no tiene por qué ser tangente a la línea de empujes, a diferencia de lo que ocurría en la curva de equilibrio.

Esta idea fue ya intuitiva con anterioridad por Thomas Young,<sup>25</sup> pero la formulación rigurosa se produce de forma casi simultánea e independiente por Gertsner en Alemania, Méry en Francia y Moseley en Inglaterra.<sup>26</sup> La contribución de Gertsner es limitada y presenta algunas incorrecciones. El tratamiento de Moseley es muy riguroso, altamente matemático y representa el primer intento con éxito de formular una teoría general de las fábricas, consideradas como un conjunto de bloques rígidos en contacto seco y directo. Finalmente, la memoria de Méry va dirigida de forma específica a los ingenieros, está escrita con sencillez y claridad, define también con rigor las ideas, y contiene numerosos ejemplos de líneas de empujes de arcos límite (el arco que contiene justo una línea de empujes), que trata de relacionar con los resultados de los ensayos de Boistard.

Tanto Moseley como Méry formularon de forma explícita la condición de estabilidad de un arco: basta con que la línea de empujes esté contenida en su interior. Se puede acotar el valor del empuje, el empuje mínimo corresponde a la línea más peraltada y el máximo a la más rebajada (Fig. 11), pero el problema está indeterminado (es hiperestático): efectivamente, un arco de suficiente espesor puede contener infinitas líneas de empujes. Méry se contenta con definir un espesor que garantice la estabilidad (mayor que el del arco límite) y que asegure que las tensiones no superen un décimo de la resistencia del material. Moseley aplica su "Principio de Reacción Mínima" (*"Principle of Least Pressure"*), para determinar la línea de empujes; ésta resulta ser la que corresponde al empuje mínimo.<sup>27</sup> Las memorias de Moseley y Méry cubren lo fundamental de la teoría de las líneas de empujes. Hay que citar la contribución de Barlow, que ideó ingeniosos ensayos sobre modelos para demostrar "la existencia en la práctica de la línea de empuje".

jes".<sup>28</sup> Las siguientes aportaciones teóricas se ocupan de diferentes métodos de obtención de la línea de empujes y de la consideración de la resistencia del material del arco. Merecen citarse las contribuciones de Carvallo y Durand-Claye.<sup>29</sup>

### El cálculo gráfico de líneas de empujes

El cálculo analítico de las líneas de empujes era todavía demasiado largo para ser utilizado como una herramienta habitual por los ingenieros. Quedaba, pues, el problema de encontrar un método de cálculo de líneas de empujes suficientemente claro y sencillo para su aplicación práctica. Los métodos gráficos propuestos por Méry, primero, y más tarde por Barlow (Fig. 12), Snell (Fig. 13) y Scheffler,<sup>30</sup> permitían obtener de forma semi-gráfica y con relativa facilidad una línea de empujes, pero no era fácil establecer relaciones entre distintas líneas de empujes, esto es, distintas situaciones de equilibrio.

El gran avance se produjo con la aplicación de los polígonos funiculares y de fuerzas, y de sus propiedades proyectivas, a la determinación de las líneas de empujes. Esto simplificó extraordinariamente el proceso de obtención de las líneas de empujes y, de hecho, popularizó la teoría del equilibrio de las bóvedas. El cálculo gráfico de líneas de empujes fue, a partir de los años 1870 la herramienta más usada por ingenieros y arquitectos.

El origen del cálculo gráfico de arcos se remonta a La Hire, quien en 1695 aplicó el polígono funicular al estudiar la estabilidad del arco de dovelas (véase más arriba). Durante todo el siglo XVIII predominó el cálculo analítico y hasta principios del XIX no se renueva el interés por los métodos gráficos (Poncelet). En cuanto a la teoría de líneas de empujes, la identidad entre cálculo analítico y gráfico, el empleo de polígonos de fuerzas y funiculares, y todas sus consecuencias teóricas, fueron expresadas con todo rigor por Rankine en su «Manual de mecánica aplicada» (1856), pero su tratamiento teórico, original y muy matemático, hizo que sus contribuciones pasaran desapercibidas.<sup>31</sup> Fue Culmann en su libro «La estática gráfica» (1866) quien desarrolló y popularizó los métodos gráficos de cálculo, entre ellos el de la línea de empujes.<sup>32</sup> A este libro siguieron, hasta finales del siglo XIX, decenas, centenares de libros de estática gráfica, y en todos ellos había un capítulo o varios dedicados al cálculo gráfico de arcos y bóvedas de fábrica, con sus correspondientes estribos, empleando líneas de empujes (Fig. 14).

### El problema de la indeterminación

Persistía el problema de la indeterminación de la línea de empujes: ¿cuál de todas las líneas de empujes posibles es la real? Las ecuaciones de equilibrio no bastaban y la consiguiente indeterminación era vista por muchos ingenieros como un defecto de la teoría. En consecuencia, en la segunda mitad del siglo XIX numerosas contribuciones trataron de encontrar la posición de la "verdadera" línea de empujes. Scheffler adoptó el "Principio de Reacción Mínima" de Moseley, desarrollando una teo-

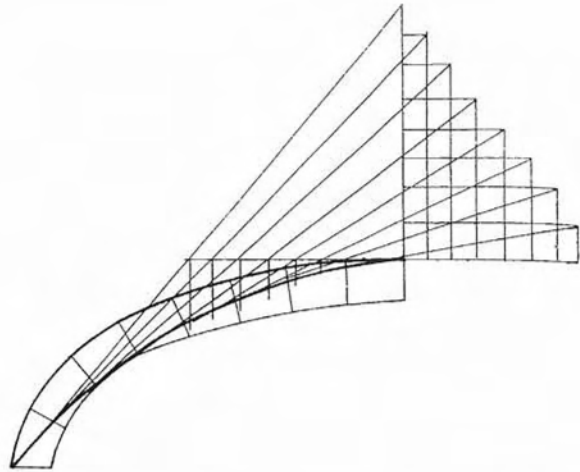


Fig. 12. Líneas de empujes. Método de Barlow basado en la constancia (para cargas verticales) de la componente horizontal del empuje (Barlow, *On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches*, 1846).

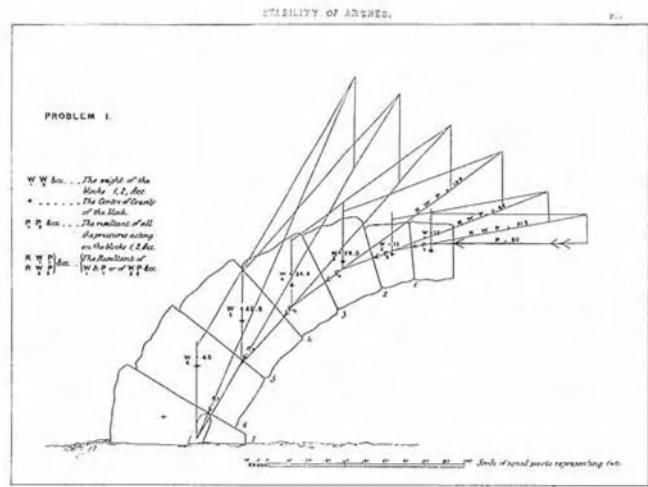


Fig. 13. Líneas de empujes. Método de Snell, basado en el paralelogramo de fuerzas (Snell, *On the stability of arches*, 1846).

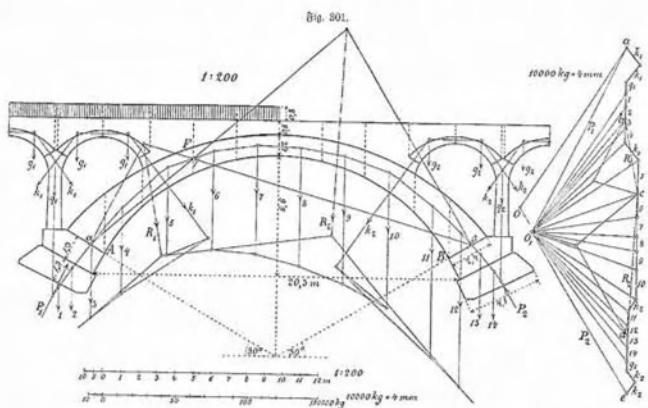


Fig. 14. Cálculo gráfico de un puente (Lauenstein, *Graphische statik*, 1913).

ría que gozó de gran difusión.<sup>33</sup> Culmann intentó también determinar su posición utilizando el "Prinzip der kleinsten Beanspruchung", "principio del esfuerzo mínimo", que establecía que de todas las líneas posibles la verdadera era la que más se acercaba a la línea media del arco.<sup>34</sup>

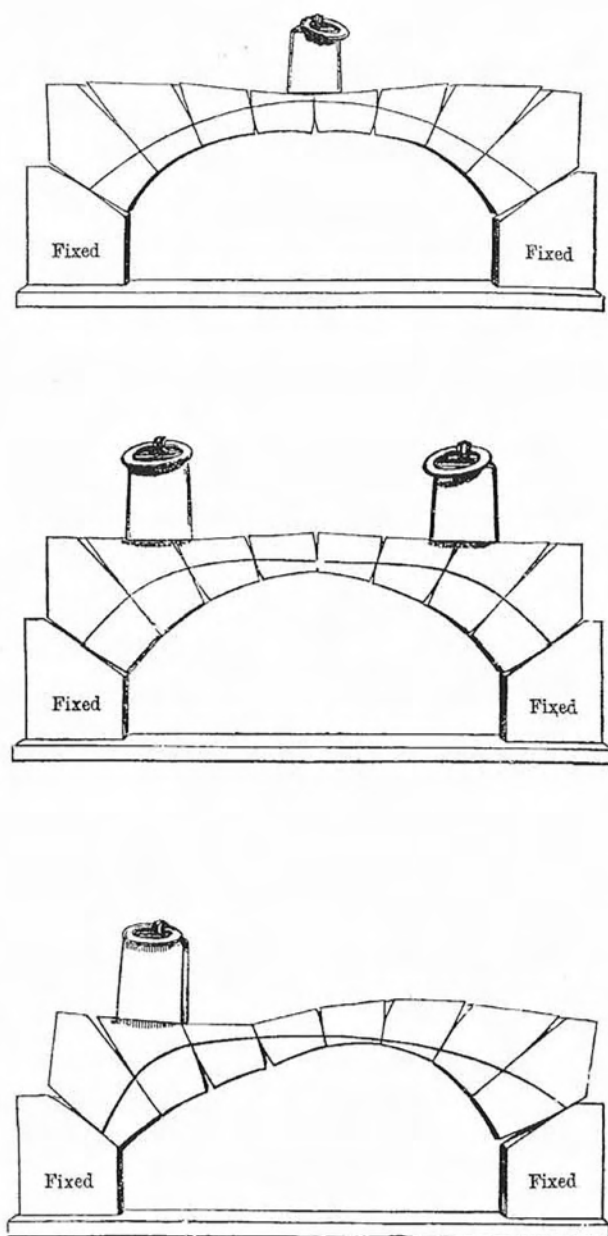


Fig. 15. Modelo para estudiar la posición de la línea de empujes  
(Jenkin, *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., 1875-88).

Otros ingenieros intuyeron el Teorema Fundamental del Análisis Límite (como ya lo hizo Gregory dos siglos antes; ver más arriba) y afirmaban que bastaba con encontrar una línea de empujes contenida dentro del arco que cumpliera ciertas condiciones (por ejemplo, que estuviera contenida dentro del tercio central) para asegurar que el arco era estable. Rankine expresó este enunciado, sin demostración, y esta "regla" se convirtió en práctica habitual durante la segunda mitad del XIX y principios del XX.<sup>35</sup> Jenkin, en su artículo sobre puentes para la Enciclopedia Británica, intentó una demostración experimental sobre la base de un modelo con dovelas de juntas convexas (Fig. 15); el modelo servía, además, para conocer visualmente la línea de empujes (el contacto, dada la convexidad, se produce en un punto, por donde necesariamente tiene que pasar el empuje).<sup>36</sup>

Se intentaron también otras soluciones que podríamos llamar "escapistas". La primera de ellas fue la de hacer coincidir la directriz del arco con una de las líneas de empujes producida por la carga permanente. Este enfoque, desarrollado por primera vez por Yvon Villarceau y Hagen, tuvo gran aceptación, sobre todo en Alemania, donde Schwedler desarrolló un procedimiento gráfico para obtener las correspondientes líneas de intradós, suponiendo un extradós horizontal.<sup>37</sup> A finales del siglo XIX la elección de la curva de intradós en las grandes bóvedas se hacía habitualmente por este método.

Otra posibilidad era la de hacer el arco isostático introduciendo tres articulaciones. A pesar de las evidentes complicaciones de ejecución a la hora de realizar las articulaciones, este procedimiento tuvo gran aceptación y se construyeron, particularmente en Alemania, numerosos puentes triarticulados de fábrica.

### El análisis elástico

Sin embargo, ya Poncelet<sup>38</sup> había adelantado que una vía para eliminar la indefinición en la posición de la línea de empujes consistía en aplicar la teoría elástica, esto es, considerar las propiedades elásticas del material y establecer condiciones de deformación. De hecho la teoría de arcos metálicos estaba suficientemente desarrollada.<sup>39</sup> Parecía, sin embargo, discutible aplicar a la fábrica las hipótesis simplificadoras inherentes al cálculo elástico: considerar un material homogéneo e isótropo, ignorar los movimientos durante el descimbramiento, suponer los estribos rígidamente empujados... en definitiva, fijar exactamente las condiciones de contorno y las propiedades del material. De hecho, entre 1850 y 1880 se distingue habitualmente en los tratados de puentes entre los arcos elásticos (de hierro o madera) y los arcos rígidos (de fábrica). A los últimos se les aplica la teoría de las líneas de empujes.

Fue Winkler el primero que propuso (de forma explícita) aplicar la teoría elástica a la determinación de la posición de la línea de empujes; de hecho su memoria se titulaba precisamente así: "La posición de la línea de empujes en las bóvedas".<sup>40</sup> Winkler era consciente de que la posición "elástica" de la línea de empujes podía sufrir perturbaciones, "Störungen", y estudia las principales: la deformación de las cimbras, el cedimiento de los estribos, los cambios de temperatura y el proceso de construcción. A estas habría que añadir la dificultad de definir las constantes elásticas para un material tan heterogéneo y anisótropo como la fábrica. No considera, sin embargo, que estas perturbaciones alteren sustancialmente la validez del análisis elástico. De hecho, en época de Winkler el desarrollo de la teoría de la elasticidad estaba en su apogeo y parecía natural aplicar la nueva teoría a todos los casos de cálculo.

Los ingenieros sentían, sin embargo, que se necesitaba una verificación experimental, y la Sociedad de Ingenieros y Arquitectos Austríacos realizó una serie completa de ensayos sobre



arcos de puentes, algunos de más de 20 m de luz. Los resultados se interpretaron como una confirmación de la validez de la teoría elástica aplicada a las fábricas y éste fue el enfoque científicamente aceptado a partir de entonces.<sup>41</sup> La teoría de líneas de empujes pasó a llamarse "antigua teoría de bóvedas" en contraposición con la moderna teoría elástica.

Los trabajos posteriores a Winkler tienden a simplificar el complejo proceso del cálculo elástico, mediante una inteligente elección de las incógnitas. En este sentido merecen citarse las contribuciones de Kohn y Mohr, que para bóvedas simétricas elegían las incógnitas de forma que cada una de las tres ecuaciones de deformación sólo contenía una incógnita. Müller-Breslau estudió más tarde el caso de las bóvedas asimétricas, y merece citarse, así mismo, por su claridad y sencillez el trabajo de Mörsch.<sup>42</sup>

Por último hay que citar la contribución de Castigliano, que propuso un modelo de análisis por tanteos para un material elástico que no resiste tracciones en su estudio sobre el puente de Mosca de Turín. El modelo se acerca más a las características reales de la fábrica; la solución sigue siendo, sin embargo, muy sensible a las condiciones de contorno elegidas.<sup>43</sup>

### La práctica corriente

La teoría elástica conducía a largos y penosos cálculos, sensibles, además, a las hipótesis realizadas en cuanto a las propiedades del material y a las condiciones de contorno. Los ingenieros eran conscientes de que la aparente precisión de los cálculos elásticos no se correspondía con la realidad de sus estructuras. Sejourné, gran ingeniero francés de principios del siglo XX y autor de un monumental libro sobre puentes de fábrica, afirmaba: "El cálculo analítico [elástico] es laborioso, molesto. El cálculo gráfico cansa menos; se presta mejor a todas las combinaciones de sobrecargas; el proceso se ve. Ambos se basan en hipótesis inexactas; la precisión del cálculo analítico es inútil; la del gráfico es suficiente; *no hay por qué preocuparse por los decimales cuando los enteros están bajo sospecha.*"<sup>44</sup> Así, en el cálculo de arcos de fábrica se siguió empleando la estática gráfica y la regla del tercio, asumiendo implícitamente que las variaciones en la posición de la línea de empujes debidas a cambios en las condiciones de contorno no disminuirían la seguridad de la estructura.

### Análisis límite

De hecho, desde la segunda mitad del siglo XIX, ya no hubo nuevas aportaciones a la teoría del arco de fábrica. Este tipo estructural estaba en franca decadencia y, alrededor de los años 1920, se dejaron de construir grandes arcos y bóvedas de fábrica. Los puentes de fábrica continuaron en servicio a lo largo de este siglo sin despertar mucho interés hasta que, en el decenio 1930-40 el aumento del peso de los vehículos obligó a plantearse de nuevo el problema de la resistencia de los arcos y bóvedas de fábrica.

Los primeros estudios, realizados por Pippard entre los años 1930 y 1940, estaban destinados a realizar simplemente comprobaciones de resistencia y utilizaban el método elástico suponiendo el arco biarticulado en sus extremos.<sup>45</sup> Pippard realizó numerosos ensayos y comprobó que el estado tensional del arco variaba sustancialmente con pequeñas alteraciones en las condiciones de contorno. También observó cómo la adaptación a los movimientos se producía por el agrietamiento del arco, que formaba articulaciones entre sus dovelas.

Hacia 1950 el clima científico había cambiado. Los completos y exhaustivos experimentos realizados en Inglaterra en los años 1930 habían demostrado, experimentalmente, la gran sensibilidad de los resultados de los cálculos elásticos a pequeñas variaciones en las condiciones de contorno. De hecho, hubo que cambiar el rumbo y, en el decenio 1940-50, nació el cálculo plástico o a rotura de los pórticos de acero.<sup>46</sup> Se comprobó que si bien el estado tensional podía sufrir grandes variaciones con pequeñas perturbaciones, la carga de colapso de una estructura se mantenía constante para esas mismas perturbaciones. Parecía razonable orientar la investigación hacia la capacidad de carga de las estructuras (análisis límite o plástico) y no hacia la obtención de un estado tensional para cada punto (análisis elástico), muy sensible a condiciones de contorno fijadas arbitrariamente. La demostración de los Teoremas Fundamentales del Cálculo Plástico (o Análisis Límite) dio rigor teórico a los resultados de los ensayos.<sup>47</sup>

El primer análisis límite de arcos de fábrica fue realizado por Kooharian<sup>48</sup> a sugerencia de Prager, pero ha sido Jacques Heyman quien ha desarrollado principalmente la teoría del análisis límite de arcos y estructuras de fábrica en los últimos treinta años.<sup>49</sup> Heyman observó que, si se cumplían determinados "principios", los Teoremas Fundamentales del Análisis Límite demostrados para estructuras de acero y hormigón, se podían aplicar a las fábricas. Estos principios son:

1. La fábrica tiene una resistencia a compresión infinita.
2. La resistencia a tracción es nula.
3. El fallo por deslizamiento es imposible.

En estas condiciones, la superficie límite se convierte en dos rectas, siendo la condición de límite que el empuje esté contenido dentro de la fábrica; cuando la línea de empujes toca el borde se forma una articulación (Fig. 16).

El colapso se produce por formación de un número suficiente de articulaciones (como en los pórticos de acero) y debido a esto se pueden demostrar los Teoremas Fundamentales del Análisis Límite. En particular, el Primer Teorema o *Teorema de la Seguridad* se puede enunciar de la siguiente manera: si es posible encontrar una línea de empujes en equilibrio con las cargas dentro del arco, éste no se hundirá. La potencia del enunciado radica en que la línea de empujes no tiene por qué ser la "real" (en el supuesto de que pudiera conocerse); basta con encontrar una cualquiera para poder afirmar que el arco es estable.

La seguridad está determinada, en cada sección, por la distancia relativa del empuje a los límites del arco. Heyman ha definido en este contexto un *coeficiente de seguridad geométrico* para los arcos de fábrica comparando el espesor del



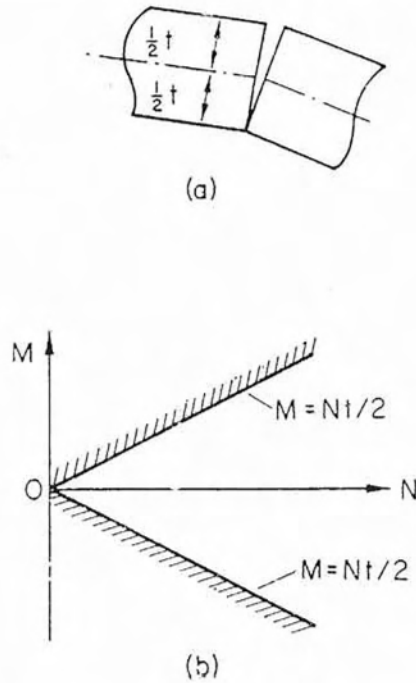


Fig. 16. Condición de límite de un arco de dovelas (Heyman, *Estructuras de fábrica*, 1995).

arco real con el del arco límite; así el arco de la figura 17 a, que tiene un espesor doble que el límite (Fig. 17 b), tendrá un coeficiente de seguridad de dos. Un corolario evidente es que si en vez de elegir la línea correspondiente al arco límite de mínimo espesor elegimos otra cualquiera, el coeficiente de seguridad respecto a esta línea representa un límite inferior del coeficiente de seguridad geométrico.

Heyman ha aplicado la idea del coeficiente de seguridad geométrico a la estimación de la resistencia de los puentes de fábrica; en este caso, además del peso propio hay que considerar una carga móvil a lo largo del puente. Para cada posición de la carga es posible calcular el arco límite; el coeficiente de seguridad resultará de dividir el espesor real por el del mayor arco límite (en general, la posición más desfavorable corresponde a la carga móvil situada aproximadamente a 1/4 de la luz respecto a los arranques). Concluye, tras el examen de varios ejemplos de puentes, que un coeficiente de dos representa una estabilidad suficiente.<sup>50</sup>

### La plasticidad de las fábricas

El marco del análisis límite permite entender la "plasticidad" de las fábricas. Los arcos de fábrica se adaptan a los pequeños movimientos del entorno abriendo y cerrando grietas. Los movimientos básicos de cedimiento y aproximación de los arranques conducen a configuraciones típicas de grietas. Por ejemplo, si en un puente de fábrica (Fig. 18 a) que cumpla los principios del análisis límite ceden ligeramente los estribos, la única forma de adaptarse al movimiento es abriendo una grieta en la clave y dos en los arranques (Fig. 18 b); en la figura se ha exagerado el desplazamiento, pero cualquier pequeño movimiento tendría el mismo efecto, si bien las grietas pueden tener el espesor de un cabello o estar cerradas por la elasticidad de la fábrica. En la figura 18 c se ha dibu-

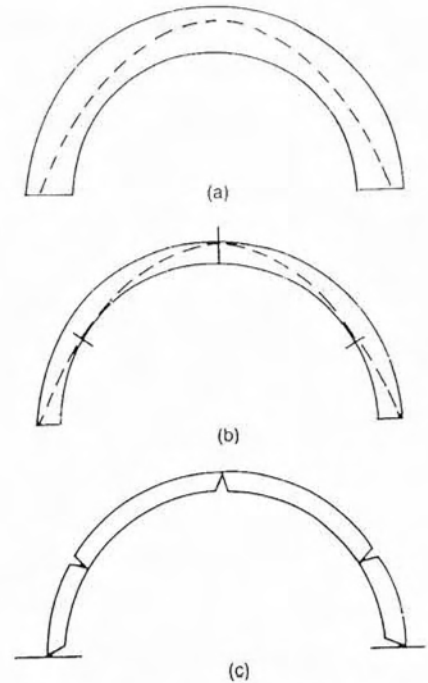


Fig. 17. Arco límite y coeficiente de seguridad geométrico (Heyman, *Estructuras de fábrica*, 1995).

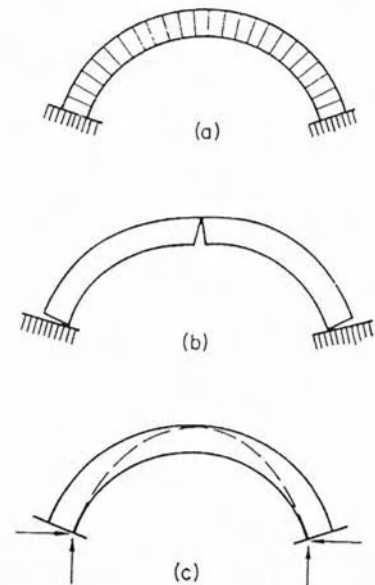


Fig. 18. Agrietamiento de un arco por cedimiento de los estribos (Heyman, *Estructuras de fábrica*, 1995).

jado la línea de empujes; ésta ya no está indeterminada, puesto que tiene que pasar por las articulaciones; ha tomado su posición más peraltada y el empuje toma su valor mínimo.

Las configuraciones de grietas varían en función de los movimientos de los arranques y a cada una de ellas corresponde una línea de empujes diferente, con estados tensionales muy distintos en cada caso. En la figura 19 se han dibujado los resultados de ensayos con modelos de arcos de dovelas.<sup>51</sup> La línea de empujes puede cambiar bruscamente de posición pero, en virtud del Primer Teorema, sabemos que para pequeños movimientos nunca se saldrá del arco. La seguridad viene determinada por la forma del arco; es un problema de geometría.

Dentro del marco del análisis límite las grietas no son "signos que presagian la ruina", más bien representan la capacidad de la fábrica de adaptarse a los pequeños movimientos, inevitables e impredecibles, del entorno. El Primer Teorema garantiza que la estructura agrietada presenta la misma seguridad que la original.

## El enfoque del equilibrio

De hecho, el enfoque que se deduce de los Principios del Análisis Límite es lo que el profesor Heyman ha llamado el "enfoque de equilibrio";<sup>52</sup> de las tres ecuaciones de la teoría de las estructuras, equilibrio, compatibilidad y del material, sólo se consideran las primeras. La línea de empujes no es más que una representación gráfica de las ecuaciones de equilibrio. Si en un arco de fábrica podemos dibujar una línea de empujes en su interior, estamos ante una solución de equilibrio que no viola la condición de límite, y que, por tanto, es *segura*. Las mismas consideraciones se aplican a cualquier estructura de fábrica.

Desde un punto de vista teórico, el profesor Heyman parece haber dado a la teoría del arco de fábrica su forma definitiva. Además la ha extendido a otras estructuras de fábrica: cúpulas, bóvedas de crucería y de abanico, agujas de piedra, torres o templos griegos, demostrando que el análisis límite permite analizar cualquier estructura de fábrica. También ha deducido los principios que se deducen desde el punto de vista de la intervención en estructuras antiguas.<sup>53</sup>

Otros autores han seguido el camino marcado por Heyman. Livesley ha explorado las posibilidades del análisis límite por ordenador, en arcos (Fig. 20) y puentes de trasdós horizontal; también ha estudiado el colapso tridimensional.<sup>54</sup> Otros trabajos han continuado la vía abierta por Heyman y Livesley.<sup>55</sup> Por último, hay que señalar que Parland ha demostrado de nuevo los Teoremas Fundamentales dentro del marco de la Mecánica de los Medios Continuos.<sup>56</sup>

## Conclusión

De las tres condiciones que debe cumplir una estructura, resistencia, deformación y estabilidad, esta última es la más crítica para las estructuras de fábrica. Para que un arco sea estable debe tener una forma que permita que las posibles líneas de empujes estén contenidas en su interior. La estabilidad de las fábricas es, pues, un problema de geometría y el moderno análisis límite ha demostrado científicamente lo que los antiguos constructores ya sabían: lo fundamental es el equilibrio y el equilibrio se consigue, como en la balanza, con una adecuada distribución de los pesos.

Gautier en el frontispicio del primer tratado de puentes<sup>57</sup> expresó esta idea con claridad (Fig. 21). Sobre un paisaje formado por puentes de distintos tipos aparece una mujer, la Arquitectura,<sup>58</sup> que dibuja la traza de un puente rodeada de las herramientas tradicionales del oficio (la regla, la escuadra, el nivel, el trinchante para labrar las piedras...). En el

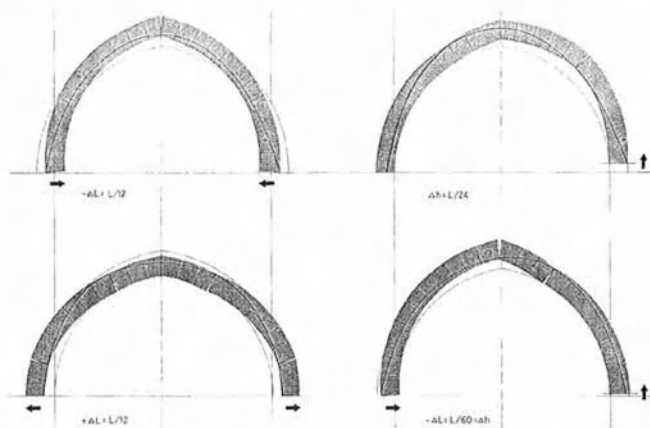


Fig. 19. Ensayo sobre modelo para demostrar la plasticidad de los arcos de fábrica (dibujo del autor).

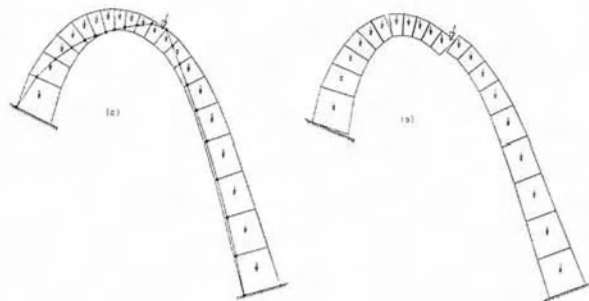


Fig. 20. Análisis por ordenador de un arco formado por bloques rígidos (Livesley, *Limit analysis of structures formed from rigid blocks*, 1978).



Fig. 21. Frontispicio del primer tratado de puentes (Gautier, *Traité des Ponts*, Paris, 1728).

centro del grabado hay una balanza con dos arcos, uno de medio punto y otro apuntado. La balanza se inclina hacia el de medio punto, expresando que éste produciría un empuje mayor que el apuntado. Al pie aparece escrito en latín: "*Ut pondera libra, sic aedificia architectura*", que, traducido libremente, dice, "Del mismo modo que se pesa en la balanza, así se ha de construir la arquitectura."

## Apéndice: sobre el empleo del Método de los Elementos Finitos en el análisis de las fábricas

El abaratamiento del coste del cálculo por ordenador ha hecho que el Método de los Elementos Finitos (MEF) haya tenido en los últimos años gran difusión. De hecho, desde los años 1960 el MEF ha fascinado a una buena parte de la profesión estructural, que piensa haber encontrado una "herramienta universal" para el análisis de estructuras. Los ingenieros y arquitectos especializados en restauración de monumentos no han escapado a esta tendencia, y en los últimos años el MEF se aplica con gran frecuencia al análisis de estructuras de fábrica.<sup>59</sup>

Los MEF elásticos presentan los mismos inconvenientes que los métodos de cálculo elástico citados antes: pobre modelización del material (se le supone con resistencia a tracción, homogéneo, isótropo, con módulo de Young definido, etc.) y obligación de hacer hipótesis tajantes sobre las condiciones de contorno. Los resultados, además, son muy sensibles a pequeñas variaciones de los parámetros anteriores y difíciles de interpretar en relación a problemas de estabilidad, que suelen ser los más críticos en estructuras de fábrica.

Los programas de MEF no-lineal suponen un avance considerable respecto a los anteriores. Para el caso de arcos de fábrica se están empleando desde 1980.<sup>60</sup> Las últimas versiones permiten estudiar los posibles agrietamientos e incluso aproximarse al cálculo de cargas de colapso, en determinadas condiciones.<sup>61</sup> Subyace el problema de la extrema sensibilidad de los resultados a las condiciones de contorno, historia de carga, movimientos durante el descimbrado, etc.

Desde el punto de vista del análisis límite, un análisis de MEF conduce a una distribución de tensiones en equilibrio con las cargas y, por tanto, da una solución segura de equilibrio (si no se viola la condición de límite). El que esta solución sea la "real" o más exacta que otras obtenidas con otros métodos (quizá mediante un sencillo cálculo de líneas de empujes), depende de la elección de las hipótesis de partida y no de la herramienta de cálculo empleada. En este sentido, un cálculo gráfico manual puede ser más preciso que un complicado análisis por ordenador. De hecho, la potencia del Primer Teorema del Análisis Límite y del mencionado enfoque del equilibrio que de él se deduce, consiste precisamente en poder trabajar con cualquier configuración de equilibrio y poder definir la seguridad sin necesidad de realizar hipótesis imposibles de verificar. □

Santiago Huerta Fernández  
Doctor Arquitecto. Profesor Titular de Cálculo de Estructuras  
E. T. S. de Arquitectura. Universidad Politécnica de Madrid

## Bibliografía básica

- Benvenuto, Edoardo, *An introduction to the history of Structural Mechanics. Part II: Vaulted structures and elastic systems*, Nueva York/Berlin: Springer Verlag, 1991, pp. 309-437.
- Benvenuto, Edoardo, Corradi, M. y Foce, F., "Sintesi storica sulla statica di archi, volte e cupole nel XIX secolo", *Palladio. Rivista di Storia della Architettura e Restauro*, Nuova Serie, vol. 1, n.º 2, 1988, pp. 51-68.
- Hamilton, S. B., "The historical development of structural theory", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 1, Parte II, 1952, pp. 374-419.
- Hertwig, A., "Die Entwicklung der Statik der Baukonstruktionen im 19. Jahrhundert", *Technikgeschichte*, vol. 30, 1941, pp. 82-98.
- Heyman, Jacques, *Coulomb's Memoir on Statics: An essay in the history of Civil Engineering*, Londres, Cambridge University Press, 1972.
- Heyman, Jacques, *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*, Madrid, Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, 1995.
- Poncet, J. V., "Examen critique et historique des principales théories ou solutions concernant l'équilibre des voûtes", *Comptes-rendus de l'Académie des Sciences (Paris)*, vol. 35, n.º 17, 1852, pp. 494-502, 531-540, 577-587.
- Timoshenko, Stephen P., *History of Strength of Materials*, Nueva York, Dover, 1983 (1.ª ed. 1953).

## Notas

1. El original del tratado de Rodrigo Gil de Hontañón se perdió; afortunadamente fue copiado por Simón García en su *Compendio de arquitectura y simetría de los templos...* Ms. 8884, Biblioteca Nacional de Madrid, 1681. La cita corresponde al fol. 18v-19r.
2. *Ibid.*, fol. 59r.
3. Para un inventario de estas reglas y una discusión sobre su validez véase: S. Huerta, *Diseño estructural de arcos, bóvedas y cúpulas en España, ca. 1500- ca. 1800*, Tesis Doctoral, E. T. S. de Arquitectura de Madrid, 1990. Un breve estudio de su aplicación a los puentes de fábrica en: J. Heyman "Cálculo de estribos en puentes de fábrica", en *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica*, Madrid, Instituto Juan de Herrera/CEHOPU, 1996, pp. 273-8.
4. Por ejemplo, la obra enciclopédica de I. Todhunter y K. Pearson, *A history of the theory of elasticity...* 3 vols., Cambridge, At the University Press, 1886-1893, escrita entre 1870 y 1880, ignora por completo el tema de los arcos de fábrica. Un reciente estudio con el mismo enfoque es el de T. M. Charlton, *A history of theory of structures in the nineteenth century*, Cambridge, 1982.
5. No se ha publicado todavía un estudio completo de las aportaciones de Leonardo a la ciencia de las estructuras. Para una excelente introducción véase W. B. Parsons, "Leonardo da Vinci, the civil engineer", en *Engineers and Engineering in the Renaissance*, Cambridge, Mass., 1976 (primera ed. 1939), pp. 67-93. Parsons no considera el Códice de Madrid, descubierto después de la publicación de su libro. Para los conocimientos de mecánica de Leonardo, véase la entrada correspondiente en el *Dictionary of Scientific Biography*, editado por C. C. Gillispie, New York: Charles Scribner's Sons, 1970-80. 16 Vols.
6. *A description of helioscopes, and some other instruments*, Londres, 1676. Véase T. Ruddock, *Arch bridges and their builders, 1735-1835*, Cambridge, 1979, p. 46. Sobre la colaboración de Hooke con Wren, véase H. I. Dorn, *The art of building and the science of mechanics*, Ph.D. diss., Princeton University, 1970, pp. 107-121, y R. Graefe "Zum Formgebung von Bögen und Gewölben", *Architectura*, vol. 16, 1986, pp. 50-67.
7. D. Gregory, "Catenaria", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 19, n.º 231, 1697, pp. 397 y ss., y "Responsio ad animadversionem ad Davidis Gregorii Catenariam", *Philosophical Transactions of the Royal Society*, vol. 21, n.º 259, 1699, pp. 419-26 (ambas en latín). Un resumen en inglés en *The mathematical papers published and dispersed in the Philosophical Transactions*, vol. 1, 1665-1700, pp. 41-55. De ahí he tomado la cita; la traducción es mía.
8. Véase T. Ruddock, *Arch bridges*, op. cit.
9. P. de La Hire, *Traité de Mécanique*, París, 1695.
10. P. de La Hire, *Traité de Mécanique*, op. cit., p. 470. Ver también las observaciones de A. F. Frézier en su libro *La théorie et la pratique de la coupe de pierres*, 3 vols, París, 1737-39, vol. I, pp. 96-104.
11. P. de La Hire, "Sur la construction des voûtes dans les édifices", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1712, pp. 70-78.
12. Para un examen detallado del método de La Hire véase: E. Benvenuto, *La Scienza della Costruzione, e il suo sviluppo storico*, Florencia, 1981, pp. 326-332 y J. Heyman, *Coulomb's memoir on statics*, Cambridge, 1972, pp. 82-84.
13. B. F. Bêlidor, *Nouveau cours de Mathématique a l'usage de l'Artillerie et du Génie...*, París, 1725, donde aparecen las primeras tablas para cálculo de los estribos de los arcos según el método de La Hire. Pero su obra más influyente es *La Science des Ingenieurs*, París, 1729, donde dedica a este tema el libro segundo "Qui traite de la mécanique des Voûtes, pour montrer la manière de déterminer l'épaisseur de leurs piédroits." En él, desarrolla la teoría de La Hire con gran extensión aplicándola a numerosos casos prácticos y a distintos tipos de bóvedas.
14. Se conserva el manuscrito de su memoria original: J. R. Perronet, *Mémoire sur l'épaisseur que doivent avoir les voûtes des ponts, avec des tables et expériences*, 1748, Ms. 2202, Bibliothèque de l'École des Ponts et Chaussées, París. La memoria fue publicada mucho más tarde por Chezy: J. R. Perronet y Chezy "Formule générale pour déterminer l'épaisseur des piles et culées des arches des ponts, soit qu'elles soient en plein cintre ou surbaissées", *Recueil de divers mémoires...*, editado por P. Lesage, París, 1810, vol. 2, pp. 243-273, lám. XVII. Las tablas de Perronet aparecen incluidas en numerosos tratados de construcción hasta la mitad del siglo XIX. Por ejemplo: J. M. Sganin, *Programme ou résumé des leçons d'un cours de constructions*, 2 vols. Liege, 1840-44, y J. A. Bagnis, *Traité élémentaire de construction*, París, 1838.



15. P. Couplet, "De la poussée des voûtes", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, 1729, pp. 79-117, lám. 4-7, y, "Seconde partie de l'examen de la poussée des voûtes", *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Paris*, 1730, pp. 117-141, lám. 6-7. Para un análisis de su contenido e implicaciones véase J. Heyman, "Couplet's Engineering Memoirs, 1726-33", *History of Technology*, vol. 1, 1976, pp. 21-44.
16. A. A. H. Danyzy, "Méthode générale pour déterminer la résistance qu'il faut opposer à la poussée des voûtes", *Histoire de la Société Royale des Sciences établie à Montpellier*, vol. 2, 1732 (Lyon 1778), pp. 40 y ss.
17. E. M. Gauthey, *Dissertation sur les dégradations survenues aux piliers du dome de Panthéon Français, et sur les moyens d'y remédier*, Paris, 1798, y *Traité de la construction des ponts* (editada por Navier), 3ª ed., 2 vols, Liège, 1845.
18. L. C. Boistard, "Expériences sur la stabilité des voûtes", *Recueil de divers mémoires*, ed. por P. Lesage, Paris, 1810, vol. 2, pp. 171-217, lám. XI-XVI.
19. C. A. Coulomb, "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture", *Mémoires de Mathématique et de Physique, présentés à l'Académie Royale des Sciences par Divers Savants et lus dans ses Assemblées* (Paris), vol. 7, 1773, pp. 343-382. Para un análisis muy detallado de la memoria de Coulomb, véase J. Heyman, *Coulomb's Memoir on Statics*, Cambridge, 1972.
20. Audoy, "Mémoire sur la poussée des voûtes en berceau", *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 4, 1820, pp. 1-96, lám. I-VI.
21. *Ibid.* pp. 77-78. Ver también, S. Huerta, *Diseño estructural de arcos...*, op. cit., pp. 361-66.
22. Gardel, "Mémoire sur le calcul des voûtes en berceau", *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 12, 1835, pp. 7-72, lám. I.; Petit, "Mémoire sur le calcul des voûtes circulaires", *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 12, 1835, pp. 73-150; Michon, "Tables et formules pratiques pour l'établissement des voûtes cylindriques", *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 15, 1848, pp. 7-117, lám. I.
23. J. V. Poncelet, "Solution graphique des principales questions sur la stabilité des voûtes", *Mémorial de l'Officier du Génie*, nº 12, 1835, pp. 151-213, lám. III.
24. Principalmente para las aportaciones germanas, véase R. Graefe, "Zum Formgebung von Bögen und Gewölben", op. cit., y K. E. Kurrer, "Zur Entstehung der Stützlinientheorie", *Bautechnik*, vol. 68, 1991, pp. 109-117.
25. Los comentarios de Young en su artículo "Bridge" de la Enciclopedia Británica hacen ver, sin lugar a dudas, que su idea de "curva de equilibrio" coincidía con la definición de línea de empujes. Pero su trabajo, escrito en su peculiar estilo, casi indescifrable, parece haber pasado desapercibido. T. Young, "Selections from the article 'Bridge' in the supplement to the Encyclopaedia Britannica (written in 1816)", *Miscellaneous Works*, London, 1855, vol. 2, pp. 194-247, lám. 3. Sobre el carácter e influencia de las contribuciones de Young, véase: S. P., *History of Strength of Materials*, Nueva York, 1953, pp. 90-98.
26. Gertsner, *Handbuch der Mechanik*, Praga, 1831. Citado por C. G. Mehrtens *Vorlesungen*, op. cit. vol. I, p. 246; Méry, E. "Mémoire sur l'équilibre des voûtes en berceau", *Annales des Ponts et Chaussées*, 1840, pp. 50-70, planches 133-134 (Según J. Dupuit, *L'équilibre des voûtes*, Paris, 1870, p. 118, el manuscrito de Méry data de 1827.); H. Moseley, "On the equilibrium of the arch", *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. 5, 1835, pp. 293-313 (leída el 9 de diciembre de 1833), y "On the theory of the equilibrium of a system of bodies in contact", *Cambridge Philosophical Transactions*, vol. 6, 1838, pp. 293-313 (leída el 15 de mayo de 1837).
27. H. Moseley, "On a new principle in statics, called the principle of least pressure", *Philosophical Magazine*, vol. 3, 1833, pp. 285-288.
28. W. H. Barlow, "On the existence (practically) of the line of equal horizontal thrust in arches, and the mode of determining it by geometrical construction", *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 5, 1846, pp. 162-182.
29. J. Carvallo, "Étude sur la stabilité des voûtes", *Annales des Ponts et Chaussées*, vol. 1, 1853, 2e. sem. pp. 1-77. A. Durand-Claye, "Sur la vérification de la stabilité des voûtes en maçonnerie et sur l'emploi des courbes de pression", *Annales des Ponts et Chaussées*, 1867, pp. 63-96, lám. 132-133.
30. Méry, Barlow y Scheffler, op. cit. más arriba. G. Snell, "On the stability of arches, with practical methods for determining, according to the pressures to which they will be subjected, the best form of section, or variable depth of voussoir, for any given extrados or intrados", *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 5, 1846, pp. 439-476, láms. 27-40.
31. W. J. M. Rankine, *A manual of applied mechanics*, Londres, 1856. El libro de Rankine contiene numerosas aportaciones originales a la teoría de estructuras. Su obra, difícil de comprender, no ha merecido el reconocimiento que merece en el campo de la teoría de estructuras. Véanse en este sentido los comentarios de Timoshenko, *History of strength of materials*, op. cit., p. 198.
32. C. Culmann, *Die graphische Statik*, Zürich, 1866.
33. H. Scheffler, *Theorie der Gewölbe, Futtermauern und eisernen Brücken*, Braunschweig, 1857. Traducción al francés, *Traité de la stabilité des constructions*, Paris, 1864.
34. Véase, A. Föppl, *Theorie der Gewölbe*, Leipzig, 1881, pp. 52.
35. Esta regla se conoce como "regla del tercio"; fue propuesta por primera vez por Couplet, "De la poussée des voûtes", op. cit., p. 132. Navier demostró que esta condición impide que aparezcan esfuerzos de tracción en la junta; L. M. H. Navier, *Resumé des leçons données*, Bruselas, 1839, pp. 166-69. Rankine la emplea en el mismo sentido que Couplet para asegurar la "estabilidad de posición"; W. J. M. Rankine, *Manual of applied mechanics*, op. cit., p. 258.
36. Jenkin, H.C. F., "Bridges", *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed., Edinburgh, 1875-88, vol. 2, pp. 284-341.
37. A. Yvon Villarceau, "Sur l'établissement des arches de pont envisagé au point de vue de la plus grande stabilité", *Institut de France, Académie des Sciences, Mémoires présentés par divers savants*, vol. 12, 1854, pp. 503-; G. Hagen, *Ueber Form und Stärke gewölbter Bogen und Kuppeln*, Berlin, 1844; J. W. Schwedler, "Theorie der Stützlinie. Ein Beitrag zur Form und Stärke gewölbter Bögen", *Zeitschrift für Bauwesen*, vol. 9, 1859, col. 109-126.
38. J.V. Poncelet, "Examen critique et historique...", op. cit., pp. 586-87.
39. El ingeniero francés Bresse parece haber sido el primero en realizar un análisis riguroso de los arcos elásticos: J. A. C. Bresse, "Études théoriques sur la résistance des arcs employés dans les ponts en fonte ou en bois", *Annales des Ponts et Chaussées*, vol. 25, 1848, pp. 150-193; *Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbes*, Paris, 1854.
40. E. Winkler, "Die Lage der Stützlinie im Gewölbe", *Deutsche Bauzeitung*, 1879 y 1880, pp. 117, 127, 130 (1879); 58, 184, 210 (1880). En Inglaterra, también Bell había propuesto unos años antes aplicar el cálculo elástico a algunos arcos de piedra: W. Bell, "On the Stresses of Rigid Arches, Continuous Beams, and Curved Structures", *Minutes and Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, vol. 33, 1871, pp. 58-165.
41. Voiron, C., "Expériences comparatives sur la résistance des voûtes entreprises par l'Association autrichienne des Ingénieurs et Architectes", *Le Génie Civil*, vol. 28, 1895-96, pp. 106-10, 123-5, 139-43, 154-6.
42. Krohn, *Zeitschrift für Baukunde*, 1880, citado por Winkler op. cit. p. 85; Mohr, *Zeitschrift der Hannover Architekten- und Ingenieurvereins*, 1881 y Müller-Breslau, *Zeitschrift der Hannover Architekten- und Ingenieurvereins*, 1884 y *Zentralblatt der Bauverwaltung*, 1889, citados por Hertwig, op. cit. p. 85; E. Mörsch, E. "Berechnung von eingespannten Gewölben", *Schweizerische Bauzeitung*, vol. 47, 1906, pp. 83-83; 89-91.
43. A. Castigliano, "Étude du pont en pierre de taille construit sur la Doire à Turin, par l'Ingénieur Ch. Mosca", *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications*, Turin, 1879, pp. 458-478.
44. P. Sejourné, *Grandes voûtes*, 6 vols., Bourges, 1913-1916. La cita es del vol. 3, p. 358; la traducción y el subrayado son míos. El libro hace un inventario de todos los grandes arcos de fábrica de más de 40 m hasta la fecha de publicación, con una descripción detallada de su construcción, estado actual, etc.
45. A. J. S. Pippard et al., "The Mechanics of the Voussoir Arch", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 4, 1936, pp. 281 y ss.; A. J. S. Pippard y R. J. Ashby, "An Experimental Study of the Voussoir Arch", *Journal of the Institution of Civil Engineers*, vol. 10, 1938, pp. 383 y ss.; A. J. S. Pippard, "The Approximate Estimation of Safe Loads on Masonry Bridges", *Civil Engineer in war*, 1948, pp. 365 y ss. Para un análisis detallado de la teoría de Pippard véase J. Heyman, *The masonry arch*, Chichester, 1982, pp. 63-71.
46. Véase, J. F. Baker, *The steel skeleton*, Cambridge, 1960.
47. Los teoremas fueron formulados por primera vez por el ruso Gvozdev en 1936 (publicados en 1938), traducción inglesa: "The determination of the value of collapse load for statically indeterminate systems undergoing plastic deformation", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 1, 1960, pp. 322-33, e independientemente por Drucker, D. C., Greenberg, H. J. y Prager, W., "Extended limit design theorems for continuous media", *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 9, 1952, pp. 381-89. Citados por M. P. Nielsen, *Limit analysis and concrete plasticity*, Englewood Cliffs, 1984.
48. A. Kooharian, "Limit analysis of voussoir (segmental) and concrete arches", *Proceedings of the American Concrete Institute*, 49, 1953, pp. 317-328.
49. Al primer artículo publicado, J. Heyman, "The stone skeleton", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 2, 1966, pp. 249-79, han seguido no menos de 25 contribuciones sobre los tipos fundamentales de la construcción en fábrica: arcos, arbotantes, bóvedas de crucería, cúpulas, torres... Los artículos han sido recopilados y traducidos al castellano en: J. Heyman, *Teoría, historia y restauración de estructuras de fábrica. Colección de ensayos*, (edición de S. Huerta), Madrid, 1995.
50. J. Heyman, *The masonry arch*, op. cit., pp. 36-40.
51. Los modelos son de cartulina y son muy sencillos de elaborar. Sobre su fabricación y funcionamiento, véase S. Huerta, *Diseño estructural de arcos...*, op. cit., p. 96. El profesor José Ignacio Hernandez, de la E. T. S. de Arquitectura de Madrid, ha desarrollado un programa de ordenador que permite estudiar los agrietamientos de los arcos para pequeños y grandes desplazamientos, que reproduce los resultados de los ensayos.
52. "Quizá la contribución más importante de la teoría plástica es que ha llevado a este concepto de cálculo basado exclusivamente en consideraciones de equilibrio, despreciando las de compatibilidad y deformación.", J. F. Baker y J. Heyman, *Plastic design of frames*, vol. 1, *Fundamentals*, Cambridge, 1969, p. 220. Numerosas referencias a la aplicación de este enfoque a arcos y construcciones de fábrica en J. Heyman, *Estructuras de fábrica*, op. cit.
53. Véase J. Heyman, *Estructuras de fábrica*, op. cit.
54. R. K. Livesley, "Limit Analysis of Structures Formed from Rigid Blocks", *International Journal Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, 1978, pp. 1853-71; "A computational model for the limit analysis of three-dimensional masonry structures", *Meccanica*, vol. 27, 1992, 161-72; "The collapse analysis of masonry arch bridges", *Proceedings of the Conference on Applied Solid Mechanics*, vol. 4, Elsevier, 1992, pp. 261-74.
55. Por ejemplo: E. A. W. Maund, "Limit analysis of structures based on discrete elements", *Structural repair and maintenance of historical buildings, III* (ed. por C. A. Brebbia), Southampton, 1993, pp. 367-74; M. Gilbert, y C. Melbourne, "Rigid-block analysis of masonry structures", *Structural Engineer*, vol. 72, 1994, pp. 356-61.
56. H. Parland, "Basic principles of the structural mechanics of masonry: a historical review", *International Journal of Masonry Construction*, vol. 2, No.2, 1982, pp. 48-58.
57. H. Gautier, *Traité des ponts*, Paris, 1728.
58. La distinción entre arquitectura e ingeniería aparece en el siglo XIX. Desde un punto de vista histórico es absurda: ¿qué eran Palladio o Miguel Ángel, arquitectos o ingenieros?
59. Consúltase cualquiera de los volúmenes de las Conferencias Internacionales que bianualmente organiza el profesor Brebbia, *Reparación Estructural y Mantenimiento de Edificios Históricos*. Por ej.: C. A. Brebbia y R. J. B. Frewer (eds.), *Structural repair and maintenance of historical buildings III*, Southampton/Boston, 1993.
60. K. D. S. Towler, *The structural behaviour of brickwork arches*, Ph. D. diss.: University of Liverpool, 1981; K. D. S. Towler y F. Sawko, "Limit state behaviour of brickwork arches", *Proceedings of the 6th International Conference of Brickwork Arches*, Roma, 1982. Para una revisión reciente del estado de la cuestión: J. Page, *Masonry arch bridges*, Londres, 1993, pp. 24-29. Una bibliografía bastante completa en: M. A. Rosa y C. Franciosi, "Gli archi murari: analisi limite, elemento finito, approccio elastico", *Giornale del Genio Civile*, vol. 128, 1990, pp. 179-206.
61. Y. Loo y Y. Tang, "Cracking and failure analysis of masonry arch bridges", *Journal of Structural Engineering*, vol. 117, 1991, pp. 1641-59.